

基于次加载面理论的砂土临界状态参数模型

富海鹰¹, 钟雨薇¹, 王孝文¹, 吴博涵¹, 袁 冉²

(1. 西南交通大学 土木工程学院, 四川 成都 610031; 2. 西南交通大学 交通隧道教育部重点实验室, 四川 成都 611752)

摘 要: 基于次加载面的砂黏统一本构模型 (clay and sand model with subloading surface, 简称 CASM-S) 适用于描述砂土和超固结黏土的力学行为, 然而该模型仍沿用线性临界状态描述砂土的应力-孔隙比关系。考虑高应力状态下砂土的压缩特性及其临界状态线在 $e-\ln p$ 平面内的非线性, 在 CASM-S 中引入了描述砂土非线性临界状态线和参考固结线 (reference compression curve, 简称 RCC) 的幂函数形式; 通过引入参数 ξ 和 λ_r , 修正了 CASM-S 的屈服面与次加载面函数以描述砂土剪切特性, 并利用参考固结线在 $e-(p/p_a)^\xi$ (其中 e 为临界状态下的孔隙比, p 为正应力, p_a 为标准大气压) 平面内的线性关系给出了先期固结压力 p_{c0} 的求解方法。新建本构模型的 11 个参数均可通过常规土工试验或经验方法确定。基于修正 CASM-S 的预测结果, 对比分析了 4 种砂土的三轴排水和不排水剪切试验结果, 证实了该模型能够有效考虑非线性临界状态线的影响, 并能够精确描述饱和砂土在不同孔隙比和围压下的三轴剪切特性。

关 键 词: 临界状态; 饱和砂土; 次加载面; 弹塑性模型

中图分类号: TU431

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2025) 06-1788-12

Critical state parameter model of sand based on subloading surface theory

FU Hai-ying¹, ZHONG Yu-wei¹, WANG Xiao-wen¹, WU Bo-han¹, YUAN Ran²

(1. School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China;

2. Key Laboratory of Transportation Tunnel Engineering, Ministry of Education, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 611752, China)

Abstract: The unified critical state parameter model (clay and sand model with subloading surface, CASM-S) effectively describes the mechanical behavior of sand and overconsolidated clay. However, the model does not include the nonlinear critical state line of sand. This study investigates the soil's compression characteristics and its nonlinear critical state line in the $e-\ln p$ plane. The CASM-S introduces a power function form of the critical state line and reference compression line (RCC) suitable for sandy soil. With additional parameters ξ and λ_r , yield surface and subsequent loading surface functions are proposed to describe the shear characteristics of the sand. The linear relationship of the reference compression curve in the $e-(p/p_a)^\xi$ plane (where e is the void ratio at the critical state, p is the normal stress, and p_a is the standard atmospheric pressure) is utilized to propose a method for determining the initial consolidation pressure p_{c0} . All 11 parameters required for this model can be obtained through conventional geotechnical tests or empirical methods. Finally, by comparing the model's predictions with triaxial drained and undrained shear test results for four types of sand, the refined CASM-S effectively considers the effect of nonlinear critical state line and describes the triaxial shear characteristics of saturated sand under varying void ratios and confining pressures.

Keywords: critical state; saturated sand; subloading surface; elasto-plastic model

1 引 言

剑桥大学 Roscoe 等^[1]提出的临界状态土力学理论是现代土力学的开端。Schofield^[2]、Roscoe^[3]

等基于大量室内三轴试验和单剪试验结果, 提出了基于临界状态理论框架的剑桥模型及修正剑桥模型。此类临界状态本构模型已经广泛应用于预测黏土的力学行为。对于砂土, 由于其力学特性受其密

收稿日期: 2024-08-28

录用日期: 2024-12-08

基金项目: 国家自然科学基金 (No.52278372, No.52278413); 中国博士后基金 (No.2021M702718)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (52278372, 52278413) and the China Postdoctoral Science Foundation (2021M702718).

第一作者简介: 富海鹰, 女, 1971 年生, 博士, 教授, 主要从事岩土工程相关的科研工作。E-mail: hyfu@swjtu.edu.cn

通讯作者: 袁冉, 女, 1987 年生, 博士, 副教授, 主要从事土体本构理论与隧道工程方面的科研工作。E-mail: yuanran@swjtu.edu.cn

实度及所受压力的影响,部分研究者提出了采用状态参数来反映其力学特性。基于砂土的真三轴试验结果,Lade 等^[4]构建了一种能够描述砂土力学行为的弹塑性本构模型。基于砂土临界状态线在 $e - \ln p$ (其中 e 为孔隙比, p 为正应力) 空间内呈线性关系的假定,Been 等^[5]通过引入状态参数,构建了砂土的本构模型。基于非相关联流动法则, Poorooshasb 等^[6-7]提出了砂土的弹塑性本构模型。基于 $p - q$ (其中 q 为偏应力) 平面内楔形屈服面, Prevost^[8]提出了模拟砂土在排水和不排水条件下单调与循环加载特性的方法。Li 等^[9-10]将原有的锥形屈服面优化为线屈服面。针对单调加载下特定压力和密实度的砂土,Zienkiewicz 等^[11]提出了弹塑性模型,用于刻画其排水和不排水特性。此后,Manzanal^[12]、Ling^[13]等在此框架下进行了改进,使得模型能够更为精确地表征砂土的力学响应。传统的临界状态本构模型仅适用于描述黏土的力学性能,Yu^[14]基于 Been 等^[5]提出的状态参数理论,建立了适用于砂土和黏土的统一弹塑性本构模型 (clay and sand model, 简称 CASM)。该模型的所有常数都具有明确的物理意义,且在室内试验或现场试验中测定也较为简单。CASM 对于砂土和黏土的力学行为描述具有很好的平衡性和可靠性,受到了学术界的广泛关注。在此基础上,Cui 等^[15]在 CASM 中引入了次加载面概念,将传统弹塑性力学理论中定义的屈服面内纯弹性域修正为弹塑性域,建立了一个考虑次加载面的超固结黏土和砂土的统一临界状态参数模型 (clay and sand model with subloading surface, 简称 CASM-S)。除了上述模型外,Pietruszczak^[16]将偏塑性应变作为状态参量,构建了砂土与黏土的统一模型。Wang 等^[17]则在传统的偏应力硬化本构模型中引入了压力依赖的硬化规律,相较于传统模型,能够更为精确地预测较大围压范围内的体积变形。

值得注意的是, Roscoe 等^[1]通过试验研究揭示, 重塑黏土的临界状态线在 $e-\ln p$ 平面内表现为线性关系。这也是建立针对黏土的临界状态本构模型的基础。然而, 大量试验证明, 对于砂土等颗粒材料, 其临界状态线在 $e-\ln p$ 平面内是非线性的^[18-20]。Li 等^[21]提出, 砂土的临界状态线在 $e-(p/p_a)^\xi$ 平面内可近似为直线 (其中 p_a 为标准大气压, $p_a = 101 \text{ kPa}$; ξ 为材料特征参数), 这一观点已得到普遍认同, 并在某些本构模型中得以实际应用^[22-25]。但在围压相差较大的情况下, 砂土的临界状态非线性行为不可忽略^[26-27]。Miura 等^[26]对 Toyoura 砂进行了固结排

水剪切试验, 得出了围压相差越高, 临界状态线的非线性越显著的结论。Nakata 等^[27]也得出了相同的结论。王宁博等^[28]探讨了砂土的初始状态依赖性, 对砂土在 $e-\ln p$ 空间内进行了初始状态分区。因此, 在本构模型的构建中考虑临界状态非线性是有必要的^[29-33]。

因此,本文在 CASM-S 的基础上额外引入两个参数 ξ 和 λ_c 来描述砂土临界状态线与等向压缩线特性,使该模型对于砂土的力学特性预测更准确。将砂土的试验数据与模拟结果进行对比,可以证明引入砂土临界状态线特性的 CASM-S 能更合理地预测砂土的力学响应。以实现 CASM-S 能同时准确描述超固结黏性土及砂土力学特性的目的。

2 本构模型

2.1 对 CASM-S 的简要回顾

本节先对 CASM-S 进行回顾, 然后提出根据砂土的非线性临界状态线进行修正的 CASM-S。CASM-S 采用与 CASM 一致的临界状态定义式:

$$e = e_{\Gamma} - \lambda \ln p_x \quad (1)$$

式中: e 为临界状态下的孔隙比; e_T 和 λ 均为常见的临界状态参数; p_x 为临界状态下的有效平均应力。

如图 1 所示, CASM-S 假设临界状态线 (critical state line, 简称 CSL) 平行于正常固结线 (normal compression line, 简称 NCL)。原始 CASM-S 的状态参数 ψ 则表示在相同平均应力 p 下, 临界状态下的当前比体积与比体积之间的垂直距离, e_N 为正常固结线在 $p = 1 \text{ kPa}$ 时的孔隙比。参考状态参数 ψ_R 则表示 CSL 与 NCL 之间的垂直距离。 ψ 和 ψ_R 的表达式分别为

$$\psi = e + \lambda \ln p - e_{\Gamma} \quad (2)$$

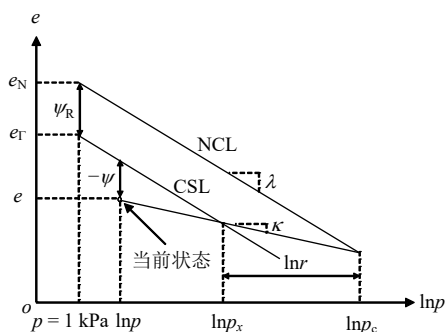


图1 CASM-S 的临界状态参数在 $e - \ln p$ 平面内
Fig.1 Critical state parameters in $e - \ln p$ plane for CASM-S

$$\psi_R = (\lambda - \kappa) \ln r \quad (3)$$

式中: κ 为回弹线的斜率; r 为正常固结状态与临界状态之间的间距之比, 可表示为

$$r = p_c / p_x \quad (4)$$

式中: p_c 为参考固结压力。

在 CASM 中, r 对应于真实土体可能达到的最疏松状态。若 $r = 2.718$, 则 CASM 退化为原始剑桥模型; 若 $r = 2$, 则退化为修正剑桥模型。因此, Yu^[34] 建议黏土的 r 取值为 1~3, 而砂土的 r 值则更大。进而给出如下的力学关系:

$$\left(\frac{\eta}{M}\right)^n = 1 - \frac{\psi}{\psi_R} \quad (5)$$

$$\eta = \frac{q}{p}, p = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (6)$$

式中: η 为应力比; M 为临界状态线斜率, 是临界状态应力比; n 为应力状态系数^[2, 35-36]。为了描述土体在未达到传统加载面前的弹塑性行为, CASM-S 采用了次加载面的概念。如图 2 所示, 假设在传统加载面内部还存在一个虚拟加载面 (即次加载面), 次加载面会根据当前的应力状态而扩张或收缩来描述土体的弹塑性力学行为。次加载面与传统加载面的面积比定义为 R (normal-sub ratio)。加载时应力指向次加载面外侧, 次加载面扩张; 卸载时应力指向次加载面内侧, 次加载面收缩。且当 R 增大到 1 时, 次加载面与传统加载面重合并不再增大。

根据图 2 所示的次加载面与传统加载面的几何关系, 可以得到 CASM-S 的屈服函数 $\hat{f}$ 和次加载面的函数 f 分别为

$$\hat{f}(\hat{\sigma}, p_c) = \left(\frac{\hat{q}}{M\hat{p}}\right)^n + \frac{\ln(\hat{p}/p_c)}{\ln r} = 0 \quad (7)$$

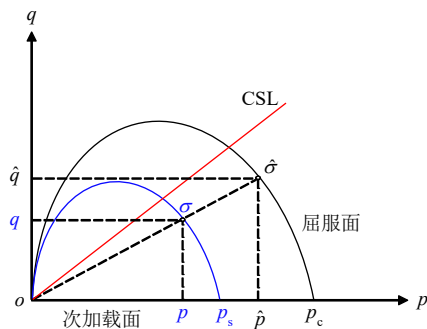


图 2 p - q 平面内的次加载面和传统加载面

Fig.2 Subloading surface and normal yield surface in p - q plane

$$f(\sigma, p_s) = \left(\frac{q}{Mp}\right)^n + \frac{\ln(p/p_s)}{\ln r} = 0 \quad (8)$$

$$R = \frac{p_s}{p_c} = \frac{p}{\hat{p}} = \frac{q}{\hat{q}} \quad (0 < R \leq 1) \quad (9)$$

式中: $\hat{\sigma}(\hat{p}, \hat{q})$ 为 σ 在传统加载面的共轭应力; p_s 为次加载面长轴, 描述了 CASM-S 的硬化行为。当 $R = 1$ 时, CASM-S 则回退到传统的 CASM。

2.2 正常固结线

如图 3 所示, 黏土的 NCL 与 CSL 在 e - $\ln p$ 平面内呈现线性且平行的特征, 因此, 在相同固结压力条件下, 两条线上的比容差异保持一致; 此外, 在同一孔隙比情况下, 固结压力的比值亦保持一致。这表明黏土的 NCL 与 CSL 之间始终符合以下公式:

$$r_c = \frac{\psi_R}{\lambda} \quad (10)$$

式中: r_c 为 RCC 与 CSL 之间的水平距离。

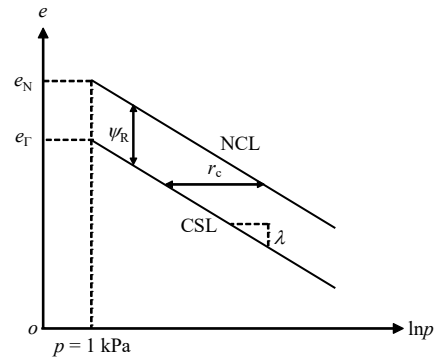


图 3 黏土临界状态线与正常固结线示意图

Fig.3 Critical state line and normal consolidation line of clay in e - $\ln p$ plane

然而对于砂土类材料, 大量的试验结果表明, 幂函数比对数函数更适合描述其临界状态线^[37-38], 即

$$e = e_{c0} - \lambda_c \left(\frac{p}{p_a}\right)^\xi \quad (11)$$

式中: e_{c0} 为临界状态线在 $p = 1$ kPa 时对应的比容; λ_c 表征 e - $(p/p_a)^\xi$ 平面内曲线的倾斜程度。

当砂土的 NCL 采用幂函数形式表征时, 由于幂函数在 e - $\ln p$ 平面内表现出非线性特征, NCL 与 CSL 违背式 (1)。此外, 多项等向压缩试验结果表明^[21, 38], 砂土的等向压缩线具有非唯一性。因此, 姚仰平等^[29]假设 e - $\ln p$ 平面内存在一条参考固结线 (reference compression curve, 简称 RCC)。该线与 CSL 之间保持恒定压力比 r_c , 即 RCC 与 CSL 之间

的水平距离 r_c 恒定，但竖直距离发生变化，如图 4 所示。根据定义及式 (2) 可得出 RCC 的表达式为

$$e = e_{c0} - \lambda_c \left(\frac{pr_c}{p_a} \right)^\xi \quad (12)$$

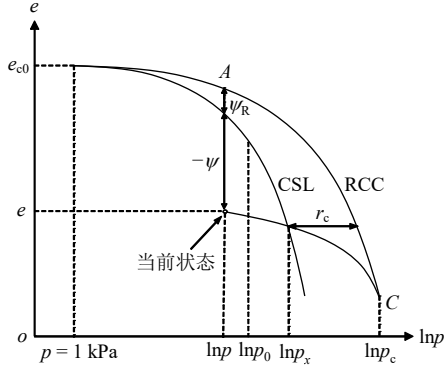


图 4 砂土临界状态线与正常固结线示意图

Fig.4 Critical state line and normal consolidation line of sand in $e - \ln p$ plane

在任意压缩压力下，RCC 与 CSL 分别对应比容 e_1 和 e_2 ，将其代入式 (2)、(3) 可得

$$e_1 - e_2 = \lambda_c \left(\frac{pr_c}{p_a} \right)^\xi (r_c^\xi - 1) \quad (13)$$

式 (13) 表明，当压缩应力 $p = 0$ kPa 时， e_1 与 e_2 相等。换言之，CSL 与 RCC 在 $p = 0$ kPa 时相交，并且随着 p 的增大， e_1 与 e_2 的差值逐渐增大。

将式 (13) 简化，RCC 的表达式为

$$e = e_{c0} - \lambda_r \left(\frac{p}{p_a} \right)^\xi \quad (14)$$

式中： λ_r 为参考压缩线系数，表达式为

$$\lambda_r = \frac{\lambda_c}{r_c^\xi} \quad (15)$$

2.3 屈服面

本节根据修正 CASM-S 的 CSL 和 RCC 推导修正 CASM-S 的屈服面方程。如图 4 所示，模型修正了原始 CASM-S 的状态参数 ψ 和 ψ_R 取值。修正 CASM-S 在等 p 路径上，RCC 与 CSL 之间的距离参考状态参数 ψ_R 的取值可以重新定义为

$$\psi_R = e_1 - e_2 = (\lambda_r - \lambda_c) \left(\frac{p}{p_a} \right)^\xi \quad (16)$$

从 A 点发展到 C 点，对应的塑性比容变化可表

示为

$$\Delta e = |\psi| + |\psi_R| = -(\lambda_r - \kappa) \left[\left(\frac{p_c}{p_a} \right)^\xi - \left(\frac{p}{p_a} \right)^\xi \right] \quad (17)$$

由此可以得出修正 CASM-S 的状态参数 ψ 为

$$\psi = \Delta e - |\psi_R| = -(\lambda_r - \kappa) \left[\left(\frac{p_c}{p_a} \right)^\xi - \left(\frac{p}{p_a} \right)^\xi \right] + (\lambda_r - \lambda_c) \left(\frac{p}{p_a} \right)^\xi \quad (18)$$

因此，可得

$$\left(\frac{\eta}{M} \right)^n = 1 - \frac{\psi}{\psi_R} = \frac{(\lambda_r - \kappa) \left[\left(\frac{p_c}{p_a} \right)^\xi - \left(\frac{p}{p_a} \right)^\xi \right]}{(\lambda_r - \lambda_c) \left(\frac{p}{p_a} \right)^\xi} \quad (19)$$

由式 (18) 可以得到修正 CASM-S 的屈服面 $\hat{f}$ 和次加载面 f 的表达式分别为

$$\hat{f}(\hat{\sigma}, p_c) = \left(\frac{\hat{q}}{M\hat{p}} \right)^n - \frac{(\lambda_r - \kappa) \left[\left(\frac{p_c}{p_a} \right)^\xi - \left(\frac{p}{p_a} \right)^\xi \right]}{(\lambda_r - \lambda_c) \left(\frac{p}{p_a} \right)^\xi} = 0 \quad (20)$$

$$f(\sigma, p_s) = \left(\frac{q}{Mp} \right)^n - \frac{(\lambda_r - \kappa) \left[\left(\frac{p_s}{p_a} \right)^\xi - \left(\frac{p}{p_a} \right)^\xi \right]}{(\lambda_r - \lambda_c) \left(\frac{p}{p_a} \right)^\xi} = 0 \quad (21)$$

2.4 流动法则

与金属材料不同，土体材料具有剪胀性，其流动法则通常是非相关联的。参考 Yu^[34] 的研究，本文采用 Rowe^[39] 提出的经典剪胀关系定义塑性势，以描述非相关联流动法则。值得注意的是，侯悦琪^[40]、Lu^[41]、Zhou^[42] 等基于分数阶导数和协变变换，提出了一种不受可微函数坐标限制的三维非正交流动法则，且该流动法则不需要构造塑性势函数，可便捷描述非相关联流动法则。但由于本文在屈服函数中考虑砂土非线性临界状态线的影响，未对塑性势函数进行修正，因此仍沿用 CASM 的非相关联流动法则。在后续的研究中，将进一步考虑三维非正交流动法则。

$$D = \frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_q^p} = \frac{\partial g / \partial p}{\partial g / \partial q} = \frac{9(M-\eta)}{9+3M-2M\eta} \quad (22)$$

式中： $d\epsilon_v^p$ 、 $d\epsilon_q^p$ 分别为塑性体应变增量和塑性偏应变增量； g 为塑性势能函数。

由式 (22) 积分可以得到 CASM-S 的塑性势能函数 g 的表达式为

$$g(\sigma) = 3M \ln \frac{p}{\beta} + (3+2M) \ln \left(\frac{2q}{p} + 3 \right) - (3-M) \ln \left(3 - \frac{q}{p} \right) \quad (23)$$

因此，塑性应变增量 $d\epsilon^p$ 可以用塑性乘子 $d\Lambda$ 表示为

$$d\epsilon^p = d\Lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} = d\Lambda \left(\frac{\partial g \partial p}{\partial p \partial \sigma} + \frac{\partial g \partial q}{\partial q \partial \sigma} \right) \quad (24)$$

其中，

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \frac{9+6M}{2q+3p} - \frac{9-3M}{3p-q}, \frac{\partial g}{\partial q} = \frac{6+4M}{2q+3p} - \frac{3-M}{3p-q} \quad (25)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{1}{3} \delta, \quad \frac{\partial q}{\partial \sigma} = \sqrt{\frac{2}{3}} n, \quad n = \frac{s}{\|s\|} \quad (26)$$

式中： δ 为克罗内克张量； σ 为应力张量； s 为偏应力张量。

2.5 硬化准则

根据次加载面的屈服函数式 (8)，可以发现次加载面的硬化受到变量 p_s 的影响。通过对式 (9) 积分可得

$$dp_s = p_c dR + R dp_c \quad (27)$$

其中参考固结压力 p_c 的变化规律可以参考剑桥模型：

$$dp_c = \mathcal{G} p_c d\epsilon_v^p \quad (28)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1+e}{\lambda_c - \kappa} \quad (29)$$

根据次加载面理论，加载开始后次加载面的大小逐渐接近传统加载面，且塑性变形在加载过程中不断累积。因此，采用 dR 来描述塑性应变速率：

$$dR = U \|d\epsilon^p\| = U d\Lambda \left\| \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\| \quad (30)$$

式中： U 为一个单调递减的状态变量，如图 5 所示。

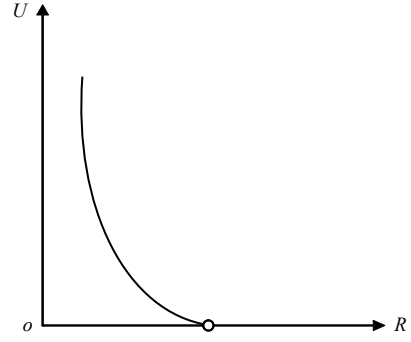


图 5 U 与 R 的关系曲线

Fig.5 Relationship between U and R

2.6 控制方程

本节根据修正 CASM-S 推导新的屈服面方程，进而推导得到修正 CASM-S 的控制方程。

在一般应力空间中，应力速率 $d\sigma$ 和应变速率 $d\epsilon$ 可以表示为

$$d\sigma = C^e : d\epsilon^e = C^e : (d\epsilon - d\epsilon^p) \quad (31)$$

式中： $d\epsilon^e$ 为弹性应变率； C^e 为弹性刚度矩阵，与剑桥模型类似， C^e 可以被定义为

$$C^e = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \delta \otimes \delta + 2GI \quad (32)$$

式中： I 为四阶单位张量； K 、 G 分别为体积模量和剪切模量，根据剑桥模型可定义为

$$K = \frac{\nu p}{\kappa} \quad (33)$$

$$G = \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} K \quad (34)$$

式中： ν 为比容； μ 为泊松比。

根据式 (8)，应力总是在次加载面上，即任意时刻 $f=0$ 。因此，可以得到次加载面的一致性条件为

$$f(\sigma + d\sigma, R + dR, p_c + dp_c) = f(\sigma, R, p_c) + \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f}{\partial R} : dR + \frac{\partial f}{\partial p_c} : dp_c \quad (35)$$

式中： $f(\sigma, R, p_c) = 0$ 。

将式 (25)、(29)、(30)、(35) 联立，可以得到塑性乘子 $d\Lambda$ 的表达式为

$$d\Lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : C^e : d\epsilon}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : C^e : \frac{\partial g}{\partial \sigma} + K_p} \quad (36)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f \partial p}{\partial p \partial \sigma} + \frac{\partial f \partial q}{\partial q \partial \sigma} \quad (37)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{nq^{n-1}}{M^n p^n} \quad (38)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\xi(\kappa - \lambda_r) \left[\left(\frac{p}{p_a} \right)^\xi - \left(\frac{p_c}{p_a} \right)^\xi \right]}{p_a (\lambda_c - \lambda_r) \left(\frac{p}{p_a} \right)^{\xi+1}} - \frac{\xi(\kappa - \lambda_r) \left(\frac{p}{p_a} \right)^{\xi-1}}{p_a (\lambda_c - \lambda_r) \left(\frac{p}{p_a} \right)^\xi} - \frac{nq \left(\frac{q}{Mp} \right)^{n-1}}{Mp^2} \quad (39)$$

将 K_p 定义为

$$K_p = -\frac{\partial f}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial \|\boldsymbol{\varepsilon}^p\|} \left\| \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\| - \frac{\partial f}{\partial p_c} \cdot \frac{\partial p_c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_v^p} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} \quad (40)$$

其中

$$\frac{\partial f}{\partial R} = \frac{\xi p_c (\kappa - \lambda_r) \left(\frac{Rp_c}{p_a} \right)^\xi}{p_a (\lambda_c - \lambda_r) \left(\frac{p}{p_a} \right)^\xi} \quad (41)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_c} = \frac{\xi(\kappa - \lambda_r) \left(\frac{p_c}{p_a} \right)^{\xi-1}}{p_a (\lambda_c - \lambda_r) \left(\frac{p}{p_a} \right)^\xi} \quad (42)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \|\boldsymbol{\varepsilon}^p\|} = U = -u \ln R \quad (43)$$

$$\frac{\partial p_c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_v^p} = g p_c \quad (44)$$

式中： u 为材料参数，用于控制次加载面在加载过程中的演化速率。

2.7 R 初始值的确定

原始 CASM-S 的先期固结压力 p_{c0} 由 CSL 和 NCL 在 $e - \ln p$ 平面内的线性几何关系推导得出。修正 CASM-S 的 CSL 与 RCC 在 $e - (p/p_a)^\xi$ 坐标系下为线性，如图 6 所示。从图中可以得出

$$\rho = (\lambda_r - \kappa) \left[\left(\frac{p_{c0}}{p_a} \right)^\xi - \left(\frac{p_0}{p_a} \right)^\xi \right] \quad (45)$$

$$\rho = e_{c0} - e_0 \quad (46)$$

式中： p_0 为初始压力； e_0 为初始孔隙比。

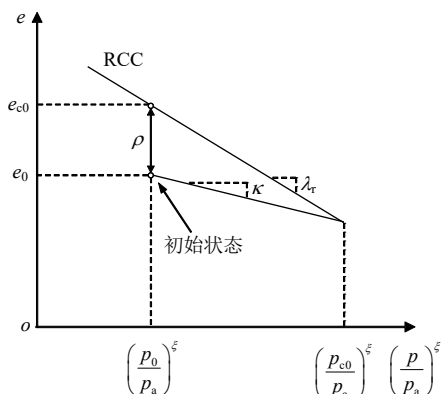


图 6 $e - (p/p_a)^\xi$ 坐标系下的先期固结压力与孔隙比关系
Fig.6 Relationship between void ratio and pre-consolidation pressure in $e - (p/p_a)^\xi$ plane

将式 (46) 代入式 (45) 可得到先期固结压力为

$$p_{c0} = \left[\frac{e_{c0} - e_0}{\lambda_r - \kappa} + \left(\frac{p_0}{p_a} \right)^\xi \right] p_a \quad (47)$$

将式 (47) 代入次加载面的函数式 (21) 可以得到 R 的初始值 R_0 为

$$R_0 = \frac{p_a}{p_{c0}} \left[\left(\frac{p_0}{p_a} \right)^\xi + \frac{(\lambda_r - \lambda_c) \left(\frac{p_0}{p_a} \right)^\xi \left(\frac{q_0}{Mp_0} \right)^n}{\lambda_r - \kappa} \right] - \xi \quad (48)$$

3 模型验证

3.1 模型参数

采用 4 种砂土的三轴剪切试验结果对新建本构模型进行验证，预测所需参数如表 1 所示。表中 κ 、 M 、 n 、 μ 和 ξ 由文献[18, 21, 25, 43-44]直接获取， e_r 由文献[13, 44-45]获取， u 由文献[15]获取。 r_c 与 λ_r 关联，只需已知其中一个即可通过式 (15) 求解另

表 1 4 种砂土试样的模型参数

试样	λ_c	κ	μ	M	λ_r
Toyoura 砂	0.019	0.050	0.3	1.30	0.008 8
Hostun 砂	0.081	0.003	0.3	1.25	0.071 4
Ottawa 砂	0.130	0.005	0.3	1.19	0.103 0
Fuji River 砂	0.033	0.010	0.3	1.48	0.026 0
试样	n	u	ξ	r_c	e_r
Toyoura 砂	4.00	25.0	0.700	3.0	0.934
Hostun 砂	5.00	1.5	0.196	1.9	0.942
Ottawa 砂	2.75	55.0	0.210	3.1	0.867
Fuji River 砂	4.00	20.0	0.700	1.4	0.920

一个。本文的 Toyoura 砂的参数 λ_c 、 λ_r 均由文献^[39] 直接获取, 其余砂土的参数 λ_c 、 λ_r 则由其压缩曲线求得。图 7 对比了 Toyoura 砂在有效压力 p' 和孔隙比 e 坐标系下的等向压缩试验结果与模型模拟结果。由图 7 可以看出, 式 (11) 准确地模拟了 Toyoura 砂的 CSL。

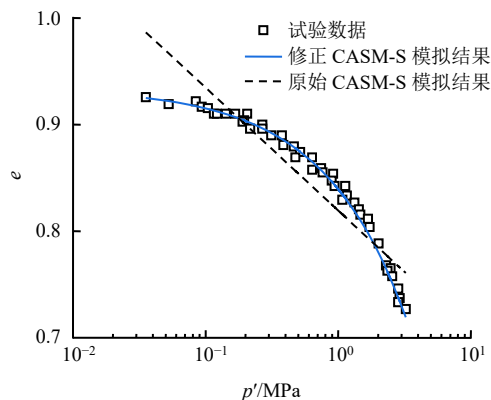
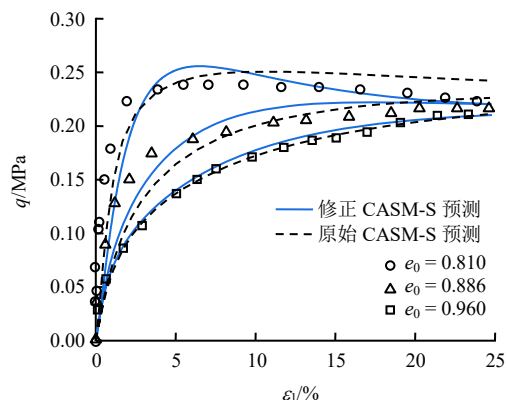


图 7 Toyoura 砂的试验与模型模拟的临界状态线对比
Fig.7 Comparison of critical state line between experiment and model simulations of Toyoura sand

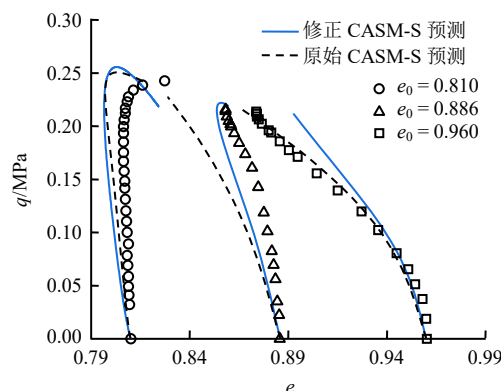
3.2 Toyoura 砂

对密实、中密、松散状态的 Toyoura 砂在初始围压 $p_0 = 0.1$ MPa 条件下进行了三轴排水剪切试验, 试验结果与修正 CASM-S 以及原始 CASM-S 的预测曲线对比如图 8 所示。图 8(a) 为剪应力与轴向应变之间的关系, 从图中可以看出, 在相同围压下, 随着初始孔隙比的减小, 砂土的剪缩性减弱, 修正 CASM-S 模型能够很好地模拟这一特性。且修正 CASM-S 的预测值稍大于试验数据, 在 $p_0 = 0.1$ MPa 下模型的预测结果更接近试验值。图 8(b) 为剪应力与孔隙比变化关系, 表明 CASM-S 能很好地预测 Toyoura 砂的排水力学特性。从图中可以看出, 修正 CASM-S 相较于原始 CASM-S 更好地预测出了 Toyoura 砂在 $e_0 = 0.810$ 时的应变软化特性, 且 CASM-S 对 Toyoura 砂剪应力与孔隙比关系的预测比原始 CASM-S 更接近试验数据。

针对 Toyoura 砂在初始围压 $p_0 = 1$ MPa 条件下开展三轴不排水剪切试验, 试验结果与模型预测的对比如图 9 所示。图 9(a) 为剪应力与轴向应变关系, 图 9(b) 为应力路径。从图 9(a) 中可以看出, 在 $p_0 = 1$ MPa 时, Toyoura 砂的应变软化特性随着 e_0 的增大更加明显, 修正 CASM-S 能很好地模拟这一特性。试验结果与预测结果的对比显示, 修正 CASM-S 和原始 CASM-S 均能很好地模拟 Toyoura 砂的不排水力学特性, 但是修正 CASM-S 对 Toyoura 砂在 $p_0 =$



(a) 轴向应变与剪应力关系



(b) 孔隙比与剪应力关系

图 8 Toyoura 砂三轴排水剪切试验结果与模型预测结果对比 ($p_0 = 0.1$ MPa)

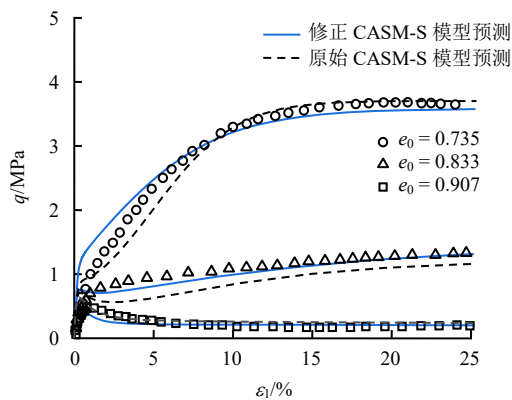
Fig.8 Comparison of results for triaxial drained shear test on Toyoura sand with model predictions ($p_0 = 0.1$ MPa)

1 MPa, $e_0 = 0.833$ 时的剪应力与体应变关系, 特别是应力路径的预测较原始 CASM-S 更准确。这是因为修正 CASM-S 修正了原始 CASM-S 砂土的线性 CSL, 使用了更接近真实砂土的非线性 CSL, 进而使得修正 CASM-S 对于砂土的应力-应变关系及应力路径的预测更加接近试验结果。

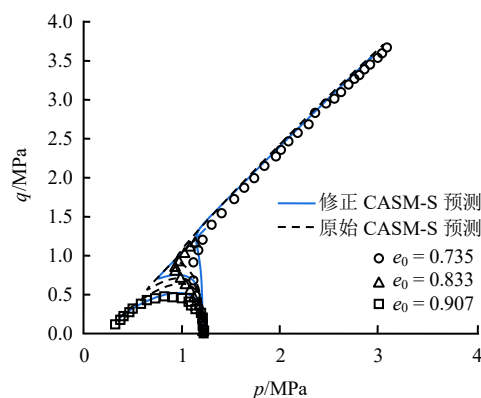
3.3 Hostun 砂

为了验证模型的准确性, 对比了 Hostun 砂在初始围压 $p_0 = 0.3$ MPa, 初始孔隙比分别为 0.574、0.800、0.945 时的三轴排水剪切试验与模型预测结果, 如图 10 所示。图 10(a) 为剪应力与轴向应变关系, 图 10(b) 为轴向应变与体应变关系。对比试验结果可以看出, 模型很好地预测了 Hostun 砂在剪切过程中的应力-应变行为, 且在 $e_0 = 0.574$ 时, 准确地表现出与试验结果一致的应变软化现象。该模型也准确地预测了 Hostun 砂的轴向应变和体应变关系, 且在预测较密砂时最终的体应变偏小。对比修正 CASM-S 与原始 CASM-S 的预测效果可以明显看

出, 原始 CASM-S 预测的 Hostun 砂在剪切过程中的剪应力以及体应变的值偏大, 而修正 CASM-S 则能更准确地模拟 Hostun 砂在排水剪切过程中的剪应力和体应变。



(a) 轴向应变与剪应力关系



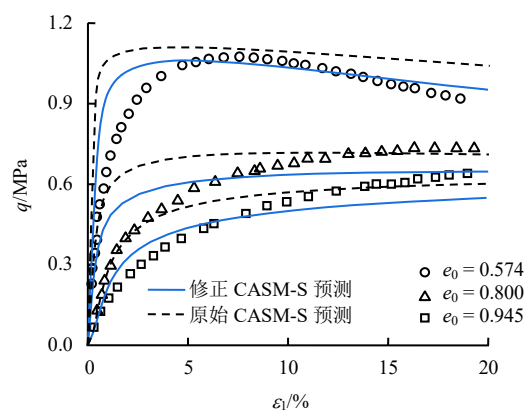
(b) 正应力与剪应力关系

图9 Toyoura 砂的三轴不排水剪切试验结果与模型预测结果对比 ($p_0 = 1$ MPa)

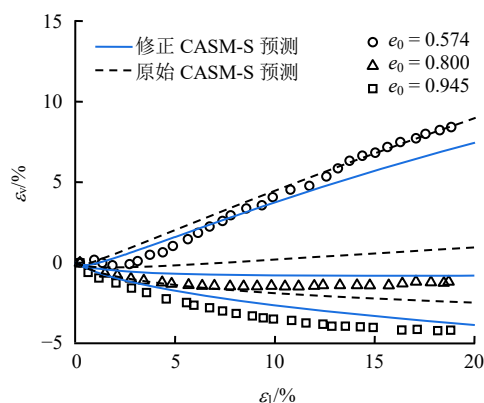
Fig.9 Comparison of results for triaxial undrained shear test on Toyoura sand with model predictions ($p_0 = 1$ MPa)

对初始孔隙比 $e_0 = 0.78$ 的 Hostun 砂在初始围压 p_0 分别为 0.1、0.2、0.3 MPa 条件下开展了三轴不排水剪切试验, 试验结果与模型预测的对比如图 11 所示。图 11(a)为剪应力与轴向应变关系, 图 11(b)为应力路径。如图 11(a)所示, 该模型准确地模拟了 Hostun 砂达到相同剪应变所对应的剪应力随着围压的增大而增大的特性, 这一特性称之为砂土的围压-应力依赖性^[46-47], 但该模型对于 Hostun 砂的强度预测是偏大的。如图 11(b)所示, 该模型准确地模拟了 Hostun 砂的三轴不排水剪切的应力路径。而对比修正 CASM-S 和原始 CASM-S 可以看出, p_0 越高, 修正 CASM-S 对 Hostun 砂的剪应力-应变关系、剪应变-体应变模拟相较于原始 CASM-S 更准确。这是由于随着围压的增大, 砂土的 CSL 的非线性特征更加显著, 所以 CSL 的非线性对于模型的预测效

果影响就更为显著。



(a) 轴向应变与剪应力关系



(b) 轴向应变与体应变关系

图10 Hostun 砂的三轴排水剪切试验结果与模型预测结果对比 ($p_0 = 0.3$ MPa)

Fig.10 Comparison of results for triaxial drained shear test on Hostun sand with model predictions ($p_0 = 0.3$ MPa)

3.4 Ottawa 砂

对孔隙比分别为 0.545 和 0.699 的 Ottawa 砂在初始围压 $p_0 = 0.1$ MPa 条件下进行了三轴排水剪切试验, 试验结果与模型预测曲线的对比如图 12 所示。图 12(a)为剪应力与轴向应变关系, 图 12(b)为轴向应变与体应变关系。如图 12(a)所示, 该模型准确地预测了 Ottawa 砂在三轴排水剪切过程中达到相同剪应变所对应的剪应力随着孔隙比的增大而减小的特性。图 12(b)则展示了修正 CASM-S 很好地预测了 Ottawa 砂在三轴排水剪切过程中的剪胀和剪缩特性。对比修正 CASM-S 与原始 CASM-S 对 Ottawa 砂在排水条件下的剪应力-轴向应变关系、体应变-轴向应变关系的预测效果可以看出, 原始 CASM-S 对 Ottawa 砂在剪切过程中的剪应力预测相较于修正 CASM-S 偏大, 而对体应变的预测值则偏小。

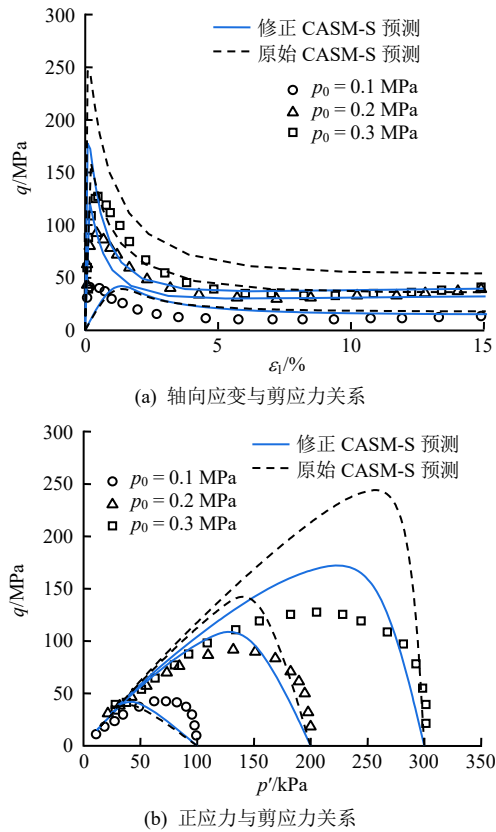


图 11 Hostun 砂三轴不排水剪切试验结果与模型预测结果对比 ($e_0 = 0.78$)

Fig.11 Comparison of results for triaxial undrained shear test on Hostun sand with model predictions ($e_0 = 0.78$)

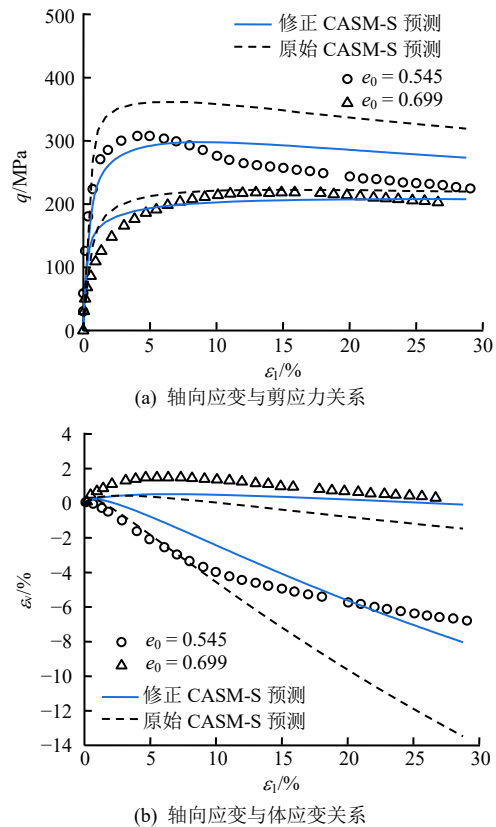


图 12 Ottawa 砂三轴排水剪切试验结果与模型预测结果对比 ($p_0 = 0.1 \text{ MPa}$)

Fig.12 Comparison of results for triaxial drained shear test on Ottawa sand with model predictions ($p_0 = 0.1 \text{ MPa}$)

在初始围压 $p_0 = 0.35$ 、 0.55 MPa 条件下, 针对 Ottawa 砂开展了三轴不排水剪切试验, 试验结果与模型预测的对比如图 13 所示。图 13(a)为剪应力与轴向应变的关系, 图 13(b)为应力路径。该模型很好地预测了 Ottawa 砂在三轴不排水剪切时的强度和应力路径, 且对峰值剪应力的预测较 Hostun 砂更为准确。从图中可以看出, 原始 CASM-S 相较于修正 CASM-S 对 Ottawa 砂不排水条件下的剪应力预测值偏小。 p_0 越大, 修正 CASM-S 对于峰值剪应力的预测越接近试验值。

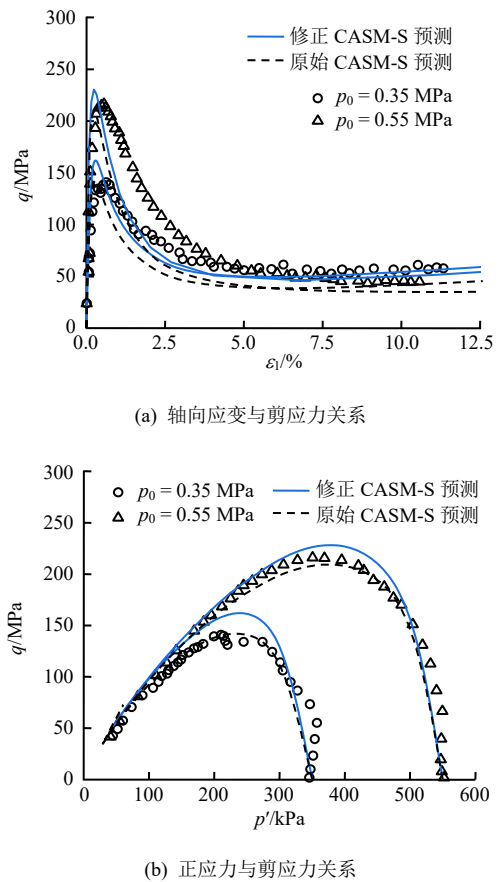


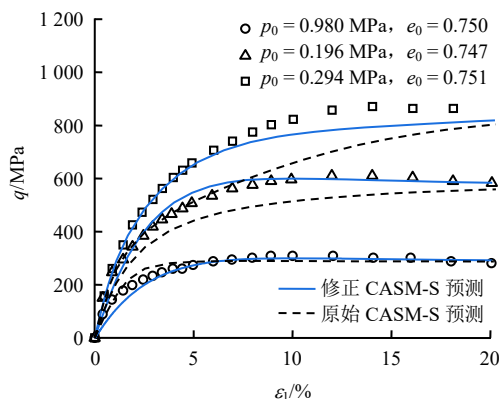
图 13 Ottawa 砂三轴不排水剪切试验结果与模型预测结果对比 ($e_0 = 0.78$)

Fig.13 Comparison of results for triaxial undrained shear test on Ottawa sand with model predictions ($e_0 = 0.78$)

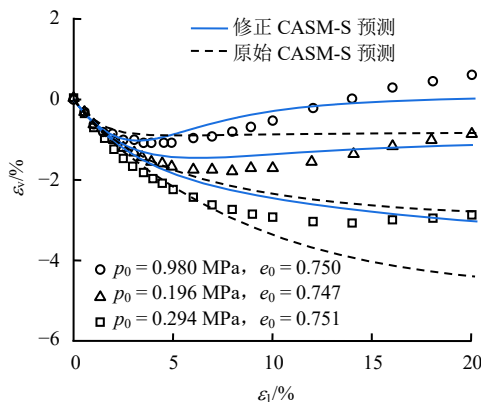
3.5 Fuji River 砂

对 $p_0 = 0.98 \text{ MPa}$, $e_0 = 0.750$; $p_0 = 0.196 \text{ MPa}$, $e_0 = 0.747$; $p_0 = 0.294 \text{ MPa}$, $e_0 = 0.751$ 的 3 组 Fuji River 砂开展三轴不排水剪切试验, 试验结果与模型预测的对比如图 14 所示。图 14(a)为剪应力与轴向应变关系, 图 14(b)为应力路径。该模型很好地预测了 Fuji River 砂在三轴不排水剪切时的强度和应力路径。从图中可以看出, p_0 越高, 修正 CASM-S 对 Fuji River 砂的剪应力-应变关系、剪应变-体应

变关系的预测相较于原始 CASM-S 更接近试验数据, 这与上述 Hostun 砂不排水剪切试验规律相同。



(a) 轴向应变与剪应力关系



(b) 轴向应变与剪应变关系

图 14 Fuji River 砂三轴排水剪切试验结果与模型预测结果对比

Fig.14 Comparison of results for triaxial drained shear test on Fuji River sand with model predictions

4 结 论

为了使CASM-S对于饱和砂土的力学特性描述更加准确, 本文基于砂土的非线性临界状态特性修正了 CASM-S 的临界状态线。考虑幂函数形式的临界状态线和参考固结线, 提出了状态参数和参考状态参数的表达式。并沿用 CASM-S 对次加载面函数的定义, 通过新定义的状态参数表达式修正了原始 CASM-S 的屈服函数与控制方程, 提出了修正 CASM-S。通过砂土的三轴剪切试验验证了新建本构模型的有效性, 所得结论如下:

(1) 利用 4 种砂土的排水与不排水试验数据, 对比了原始 CASM-S 及修正 CASM-S 预测结果。结果表明, 修正 CASM-S 相较于原始 CASM-S 能更好地模拟饱和砂土在不同孔隙比和围压下的力学特性。

(2) 对比修正 CASM-S 和原始 CASM-S, 修正 CASM-S 能更为准确地预测砂土排水和不排水条件下的剪切特性。且在围压越大的情况下, 相较于原始 CASM-S, 修正 CASM-S 对砂土剪切特性的预测越接近三轴试验值。

参 考 文 献

- [1] ROSCOE K H, SCHOFIELD A N, WROTH C P. On the yielding of soils[J]. *Geotechnique*, 1958, 8(1): 22-53.
- [2] SCHOFIELD A, WROTH P. Critical state soil mechanics[M]. London: McGraw-Hill, 1968.
- [3] ROSCOE K H, BURLAND J B. On the generalized stress-strain behaviour of wet clay[C]//Engineering Plasticity. Cambridge: Cambridge University Press, 1968: 535-609.
- [4] LADE P V, DUNCAN J M. Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil[J]. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 1975, 101(10): 1037-1053.
- [5] BEEN K, JEFFERIES M G, HACHEY J. The critical state of sands[J]. *Géotechnique*, 1992, 42(4): 655-663.
- [6] POOROOSHASB H B, HOLUBEC I, SHERBOURNE A N. Yielding and flow of sand in triaxial compression, part I[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1966, 3(5): 179-190.
- [7] POOROOSHASB H B, HOLUBEC I, SHERBOURNE A N. Yielding and flow of sand in triaxial compression, part II[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1967, 4(4): 376-397.
- [8] PREVOST J H. A simple plasticity theory for frictional cohesionless soils[J]. *International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1985, 4(1): 9-17.
- [9] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. *Géotechnique*, 2000, 50(4): 449-460.
- [10] LI X S, MING H Y. Unified modeling of flow liquefaction and cyclic mobility[J]. *Soil dynamics and Earthquake Engineering*, 2000, 19(5): 363-369.
- [11] ZIENKIEWICZ O C, LEUNG K H, PASTOR M. Simple model for transient soil loading in earthquake analysis. I. Basic model and its application[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1985, 9(5): 453-476.
- [12] MANZANAL D, FERNÁNDEZ MERODO J A, PASTOR M. Generalized plasticity state parameter-based model for saturated and unsaturated soils. Part 1: saturated state[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2011, 35(12): 1797-1812.

- 1347-1362.
- [13] LING H I, YANG S. Unified sand model based on the critical state and generalized plasticity[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2006, 132(12): 1380-1391.
- [14] YU H S. CASM: a unified state parameter model for clay and sand[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1998, 22(8): 621-653.
- [15] CUI K, WANG X, YUAN R, et al. A unified critical state parameter model for sand and overconsolidated clay in the framework of subloading surface theory[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2023, 60(10): 1461-1474.
- [16] PIETRUSZCZAK S. Fundamentals of plasticity in geomechanics[M]. [S. l.]: CRC Press, 2010.
- [17] WANG M, QU T, FENG Y, et al. A refined deviatoric hardening plastic model for sand[J]. **Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering**, 2024, 16(7): 2813-2821.
- [18] VERDUGO R, ISHIHARA K. The steady state of sandy soils[J]. **Soils and Foundations**, 1996, 36(2): 81-91.
- [19] RIEMER M F, SEED R B. Factors affecting apparent position of steady-state line[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 1997, 123(3): 281-288.
- [20] WANG Y. Characterization of dilative shear failure in sand[D]. Hong Kong: Hong Kong University of Science and Technology, 1997.
- [21] LI X S, WANG Y. Linear representation of steady-state line for sand[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 1998, 124(12): 1215-1217.
- [22] CHANG C S, KABIR M G, CHUNG Y. Micromechanics modeling for stress-strain behavior of granular soils. II: evaluation[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1992, 118(12): 1975-1992.
- [23] LOUKIDIS D, SALGADO R. Modeling sand response using two-surface plasticity[J]. **Computers and Geotechnics**, 2009, 36(1-2): 166-186.
- [24] WANG G, XIE Y. Modified bounding surface hypoplasticity model for sands under cyclic loading[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2014, 140(1): 91-101.
- [25] YIN Z Y, WU Z X, HICHER P Y. Modeling monotonic and cyclic behavior of granular materials by exponential constitutive function[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2018, 144(4): 04018014.
- [26] MIURA K, MIURA S, TOKI S. Deformation behavior of anisotropic dense sand under principal stress axes rotation[J]. **Soils and Foundations**, 1986, 26(1): 36-52.
- [27] NAKATA Y, HYODO M, MURATA H, et al. Flow deformation of sands subjected to principal stress rotation[J]. **Soils and Foundations**, 1998, 38(2): 115-128.
- [28] 王宁博, 姚仰平. 砂土特征状态线及不排水特性的初始状态分区[J]. **岩土力学**, 2023, 44(11): 3165-3172.
- WANG Ning-bo, YAO Yang-ping. Characteristic state lines and subarea of initial state of sand under undrained shearing[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2023, 44(11): 3165-3172.
- [29] 姚仰平, 张民生, 万征, 等. 基于临界状态的砂土本构模型研究[J]. **力学学报**, 2018, 50(3): 589-598.
- YAO Yang-ping, ZHANG Min-sheng, WAN Zheng, et al. Constitutive model for sand based on the critical state[J]. **Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, 2018, 50(3): 589-598.
- [30] YIN Z Y, HICHER P Y, DANO C, et al. Modeling mechanical behavior of very coarse granular materials[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2017, 143(1): C4016006.
- [31] DUNCAN J M, CHANG C Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils[J]. **Journal of the soil mechanics and foundations division**, 1970, 96(5): 1629-1653.
- [32] VERMEER P A. A double hardening model for sand[J]. **Geotechnique**, 1978, 28(4): 413-433.
- [33] JEFFERIES M G. Nor-sand: a simple critical state model for sand[J]. **Geotechnique**, 1993, 43(1): 91-103.
- [34] YU H S. Plasticity and geotechnics[M]. New York: Springer, 2006.
- [35] SLADEN J A, D'HOLLANDER R D, KRAHN J. The liquefaction of sands, a collapse surface approach[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1985, 22(4): 564-578.
- [36] CUSS R J, RUTTER E H, HOLLOWAY R F. The application of critical state soil mechanics to the mechanical behaviour of porous sandstones[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2003, 40(6): 847-862.
- [37] CHANG C S, CHANG Y, KABIR M G. Micromechanics modeling for stress-strain behavior of granular soils. I: theory[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1992, 118(12): 1959-1974.
- [38] LI X S, DAFALIAS Y F, WANG Z L. State-dependant dilatancy in critical-state constitutive modelling of sand[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1999, 36(4): 599-611.